4.2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ – ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

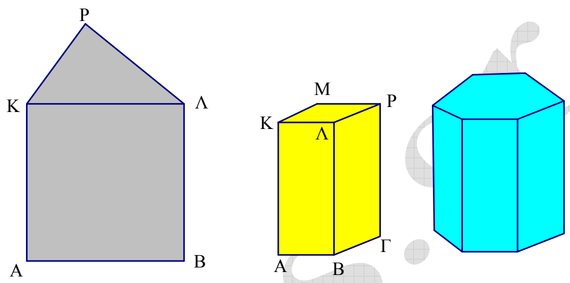
ΘΕΩΡΙΑ

1 .

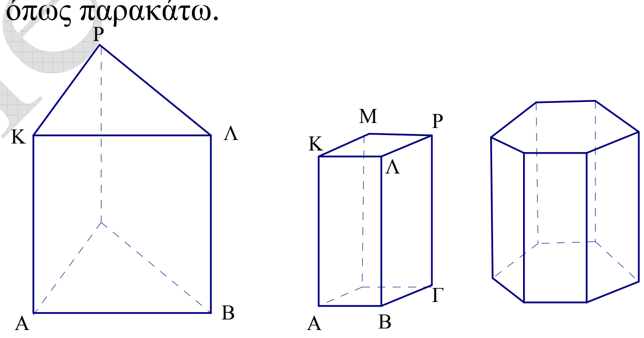
Ονοματολογία

Ένα στερεό σώμα που η μορφή του είναι σαν τα παρακάτω σώματα, λέγεται πρίσμα.

Τα μέρη των επιπέδων τα οποία δημιουργούν τη μορφή του πρίσματος ονομάζονται **έδρες**.
Ειδικότερα :
Οι δύο **παράλληλες** μεταξύ τους Έδρες, που είναι ίσα πολύγωνα, ονομάζονται **βάσεις,** ενώ όλες οι υπόλοιπες που είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα ονομάζονται **παράπλευρες έδρες** και η επιφάνεια που ορίζουν ονομάζεται **παράπλευρη επιφάνεια**.



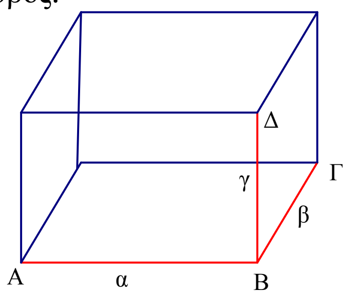
Οι πλευρές των εδρών του πρίσματος ονομάζονται **ακμές**.
Ύψος ενός πρίσματος ονομάζεται η απόσταση των βάσεών του και είναι ίσο με το ύψος μιας παράπλευρης έδρας.
Στο παραπάνω **γκρίζο σχήμα** η μία **βάση** του φαίνεται και είναι το τρίγωνο ΚΛΡ ενώ η άλλη είναι η απέναντί της που δεν φαίνεται.
Μία **παράπλευρη έδρα** που φαίνεται είναι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΚΑΒΛ ενώ οι άλλες δεν φαίνονται.
Ακμές του πρίσματος που φαίνονται είναι τα τμήματα ΚΑ , ΑΒ , ΒΛ , ΚΛ , ΚΡ και ΡΛ, οι υπόλοιπες δεν φαίνονται.
Το **ύψος** του πρίσματος είναι ίσο με μία από τις ακμές ΚΑ ή ΛΒ.
Ανάλογη ονοματολογία ισχύει και στα άλλα πρίσματα .
Στη Γεωμετρία, τα παραπάνω πρίσματα τα θεωρούμε εξαϋλωμένα και τα σχεδιάζουμε όπως παρακάτω.

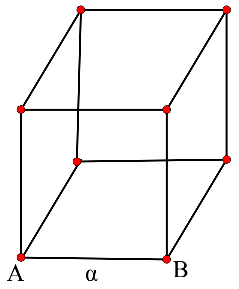


Ένα πρίσμα το ονομάζουμε με βάση την μορφή των πολυγώνων των βάσεων του
Από τα παραπάνω το πρώτο είναι τριγωνικό, το δεύτερο τετραπλευρικό, το τρίτο εξαγωνικό.

2 .
Δύο γνωστά πρίσματα

Τα ποιο γνωστά πρίσματα είναι:
Το **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο** με όλες τις έδρες του ορθογώνια και ο **κύβος** με όλες τις έδρες του τετράγωνα.
Παρακάτω το αριστερά σχήμα είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και το δεξιά ένας κύβος.





Στο παραλληλεπίπεδο τα τμήματα ΑΒ , ΒΓ , ΒΔ ονομάζονται μήκος ,πλάτος και ύψος αντίστοιχα και αποτελούν τις διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

3.
Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας πρίσματος

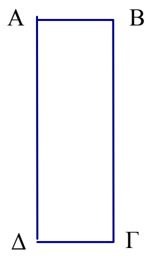
$E_{\text{παράπλευρο}}$ = (περίμετρος βάσης)·(ύψος)

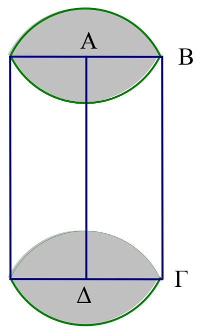
4.
Εμβαδόν ολικής επιφάνειας πρίσματος

$E_{\text{ολικό}} = E_{\text{παράπλευρο}} + 2\,E_{\text{βάσης}}$

5.
Κύλινδρος

Αν φανταστούμε ότι το διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ περιστρέφεται κάνοντας μία πλήρη περιστροφή γύρω από την πλευρά του ΒΓ, τότε θα δημιουργηθεί το το στερεό σώμα που είναι δίπλα του.
Αυτό ο στερεό σώμα το λέμε **κύλινδρο**.
Οι δύο **κυκλικοί δίσκοι** από τους οποίους αποτελείται η επιφάνεια του κυλίνδρου λέγονται **βάσεις**, ενώ το υπόλοιπο μέρος της επιφάνειάς του το ονομάζουμε παράπλευρη επιφάνεια.
Ύψος του κυλίνδρου ονομάζεται η απόσταση των δύο βάσεων.





6.
Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου

$E_{\text{παράπλευρο}}$ = (περίμετρος βάσης)·(ύψος) = 2πρυ , όπου ρ η ακτίνα των βάσεων

7.

Εμβαδόν ολικής επιφάνειας κυλίνδρου

$E_{\text{ολικό}} = E_{\text{παράπλευρο}} + 2\,E_{\text{βάσης}}$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Υπενθύμιση για τις μονάδες μέτρησης εμβαδού

Βασική μονάδα το **1 τετραγωνικό μέτρο** και σύμβολο αυτού $1m^2$. Είναι η επιφάνεια που έχει ένα τετράγωνο πλευράς 1 m.

Υποδιαιρέσεις του τ. μέτρου :

- 1 τετραγωνικό δεκατόμετρο ($1dm^2$)

  Είναι $1dm^2 = \frac{1}{100} m^2 = 0{,}01\ m^2$
- 1 τετραγωνικό εκατοστόμετρο ($1\ cm^2$)

  Είναι $1cm^2 = \frac{1}{10000}\ m^2 = 0{,}0001\ m^2$
- 1 τετραγωνικό χιλιοστόμετρο ($1\ mm^2$)

  Είναι $1mm^2 = \frac{1}{1000000}\ m^2 = 0{,}000001\ m^2$

Πολλαπλάσιο του τ. μέτρου : 1 τετραγωνικό χιλιόμετρο ($1km^2$)

Είναι $1km^2 = 1000000\ m^2 = 10^6\ m^2$

Στην Ελλάδα επίσης χρησιμοποιείται το στρέμμα .

1 στρέμμα $= 1000\ m^2$

2.

Υπενθύμιση : Το μήκος κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο $L = 2\pi\rho$ και το εμβαδόν του από τον τύπο $E = \pi\rho^2$, $\pi = 3{,}14$

3.

Παρατήρηση : Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α , β και γ δίνεται από τον τύπο $E_{\text{ολικό}} = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$ και το εμβαδόν της επιφάνειας ενός κύβου ακμής α από τον τύπο $E = 6\alpha^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Στις παρακάτω ερωτήσεις επιλέξτε την σωστή απάντηση

Ένα πρίσμα με βάση τρίγωνο έχει

α) Α: 5έδρες Β: 8 έδρες Γ: 9 έδρες

β) Α: 8 κορυφές Β: 6 κορυφές Γ: 9 κορυφές

γ) Α: 12 ακμές Β: 9 ακμές Γ: 6 ακμές

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία

α)

Τρείς οι παράπλευρες και 2 οι βάσεις, σύνολο 5. Σωστό το Α

β)

Τρείς κορυφές στην κάτω βάση και τρείς στην πάνω, σύνολο 6. Σωστό το Β

γ)

Τρείς οι παράπλευρες και από τρείς στην πάνω και κάτω βάση, σύνολο 9.
Σωστό το Β.

2.

Ένα πρίσμα με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων 8cm και 5cm, έχει ύψος 4cm.

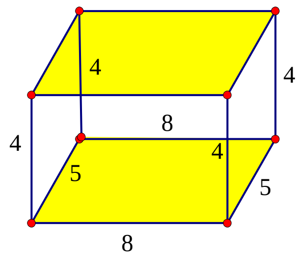
α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι

Α: $117cm^2$ Β: $162cm^2$ Γ: $104cm^2$

β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι

Α: $314cm^2$ Β: $184cm^2$ Γ: $157cm^2$

Προτεινόμενη λύση



α)

$E_{παράπλευρης}$ = (περίμετρος βάσης)·(ύψος) =
= (2·8 + 2·5)·4 =
= $104cm^2$

Σωστό το Γ

β)

$E_{βάσης} = 5·8 = 40\ cm^2$ οπότε $E_{ολικό} = E_{παράπλευρης} + 2E_{βάσης}$ =
= 104 + 80 =
= $184cm^2$

Σωστό το Β

3.

Ένας κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης 10cm και ύψος 10cm.

α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι

A: $314cm^2$ B: $942cm^2$ Γ: $628\ cm^2$

β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι

A: $1256\ cm^2$ B: $628\ cm^2$ Γ: $1884\ cm^2$

Προτεινόμενη λύση

α)

$E_{παράπλευρης} = 2π·ρ·υ = 2·3,14·10·10 = 628cm^2$. Σωστό το Γ

β)

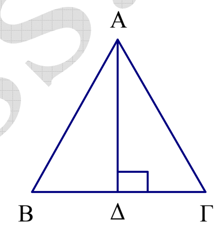
$E_{βάσης} = πρ^2 = 3,14·10^2 = 314\ cm^2$ άρα

$E_{\ ολικό} = E_{\ παράπλευρης} + 2E_{βάσης} = 628 + 2·314 = 1256cm^2$. Σωστό το Α

4.

Η παράπλευρη επιφάνεια ενός πρίσματος με βάσεις ισόπλευρα τρίγωνα είναι $E_{\ παράπλευρης} = 192cm^2$ και το ύψος του πρίσματος είναι 8 cm. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας.

Προτεινόμενη λύση



Έστω x η πλευρά της βάσης του πρίσματος.

$E_{\ παράπλευρης}$ = (περίμετρος βάσης)·(ύψος), άρα

$192 = 3x·8$ συνεπώς $x = 8$ cm

Έστω ΑΒΓ το ισόπλευρο τρίγωνο βάσης του πρίσματος και ΑΔ το ύψος του τριγώνου.

Ως γνωστόν το ύψος είναι και διάμεσος.

Από το Πυθαγόρειο στο ΑΒΔ έχουμε $ΑΔ^2 = ΑΒ^2 – ΒΔ^2 =$

$= 8^2 – 4^2 =$

$= 64 – 16 = 48$

άρα $ΑΔ = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ cm

Το εμβαδόν της βάσης είναι $E_{βάσης} = \dfrac{ΒΓ \cdot ΑΔ}{2} = \dfrac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}\ cm^2$

Μετά από αυτά $E_{ολικό}$ = Ε παράπλευρης + 2 Ε βάσης $= 192 + 2·16\sqrt{3} =$

$= 192 + 32\sqrt{3}\ cm^2$.

5.

Ένας κύλινδρος βαψίματος έχει μήκος 30cm και ακτίνα βάσης 5cm. Να βρείτε

α) Πόση επιφάνεια βάφει σε μία πλήρη περιστροφή.

β) Πόσες περιστροφές θα κάνει για να βάψει έναν τοίχο σχήματος ορθογωνίου με μήκος 5m και πλάτος 3m.

Προτεινόμενη λύση

α)

Η επιφάνεια που βάφεται σε μία περιστροφή είναι ίση με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου, δηλαδή ίση με είναι $2π·5·30 = 300·3,14 = 942cm^2$

β)

Η επιφάνεια του τοίχου έχει εμβαδόν $E = 5·3 = 15m^2 = 15·10000cm^2 = 150000cm^2$

Για να βαφτεί ο τοίχος θα χρειαστούν 150000: 942 ≈159,2 περιστροφές

6.

Μία πισίνα έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μήκος 25 m , πλάτος 15m και ύψος 2,5m

α) Να βρείτε την επιφάνεια της πισίνας.

β) Να βρείτε πόσο θα στοιχίσει η επίστρωση της πισίνας με τετραγωνικά πλακάκια πλευράς 25cm, αν το κάθε πλακάκι κοστίζει 0,30 €

Προτεινόμενη λύση

α)

Η επιφάνεια της πισίνας είναι ίση με την παράπλευρη επιφάνεια του παραλληλεπιπέδου σχήματός της συν το εμβαδό του πυθμένα της.

$E_{\text{παράπλευρης}} = (2\cdot 25 + 2\cdot 15)\cdot 2,5 = 200\ m^2$ και

$E_{\text{βάσης}} = 25\cdot 15 = 375$ επομένως

$E_{\text{πισίνας}} = 200 + 375 = 575\ m^2 = 5750000 cm^2$

β)

Το κάθε πλακάκι έχει εμβαδόν $E = 25\cdot 25 = 625 cm^2$

Για την επίστρωση της πισίνας θα χρειαστούν 5750000 : 625 = 9200 πλακάκια αξίας 9200·0,30 = 2760 €

7.

Το μήκος της βάσης ενός κυλίνδρου είναι 50,24 cm και το ύψος του 20cm . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου .

Προτεινόμενη λύση

Μήκος βάσης = 50,24 επομένως, αν ρ είναι η ακτίνα της βάσης, τότε

$2\cdot 3,14\cdot \rho = 50,24$ συνεπώς $\rho = 8$

$E_{\text{ολικό}} = E_{\text{παράπλευρης}} + 2E_{\text{βάσης}} = 50,24\cdot 20 + 2\cdot 3,14\cdot 8^2 = 1406,72 cm^2$

8.

Θέλουμε να βάψουμε 50 σωλήνες με μήκος 1,5m και εξωτερική διάμετρο 0,20m. Πόσο θα μας στοιχίσει, αν το βάψιμο κοστίζει 3€ το m^2.

Θεωρία 6

Προτεινόμενη λύση

Ο ένας σωλήνας έχει παράπλευρη επιφάνεια ίση με $2\cdot 3,14\cdot 0,10\cdot 1,5 = 0,942 m^2$

Η συνολική επιφάνεια που θα βάψουμε είναι ίση με $50 \cdot 0,942 = 47,1\ m^2$

Το κόστος του βαψίματος θα είναι 47,1·3 = 141,3€

9.

Πρίσμα έχει βάσεις τετράγωνα και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 320 cm^2.
Αν το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι 448cm^2 , να βρείτε
α) την πλευρά της βάσης του πρίσματος
β) το ύψος του πρίσματος

Προτεινόμενη λύση

α)
Το εμβαδόν των δύο βάσεων είναι ίσο με $448 - 320 = 128 cm^2$
Επομένως η κάθε βάση έχει εμβαδόν $128 : 2 = 64\ cm^2$
Αν x είναι η πλευρά της βάσης τότε $x^2 = 64$ άρα $x = 8$ cm

β)
$E_{\text{παράπλευρης}}$ = (περίμετρος βάσης)·(ύψος) άρα
$320 = 4 \cdot 8 \cdot υ$ συνεπώς $υ = 10$cm

10.

Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι τρείς διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί με άθροισμα 18. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παραλληλεπιπέδου.

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 3

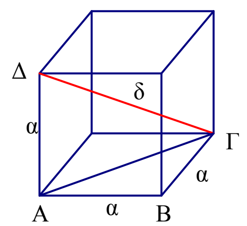
Αν x είναι ο ποιο μικρός ακέραιος τότε οι άλλοι είναι οι $x + 1$ και $x + 2$
Από υπόθεση έχουμε ότι $x + x + 1 + x + 2 = 18$ απ' όπου $x = 5$
Άρα οι διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου είναι 5 , 6 και 7.
Επομένως $E_{\text{ολικό}} = 2(5 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 7) = 107$ τετραγωνικές μονάδες

11.

Η διαγώνιος ενός κύβου είναι $δ = 8\sqrt{3}$ cm. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας του κύβου.

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 3



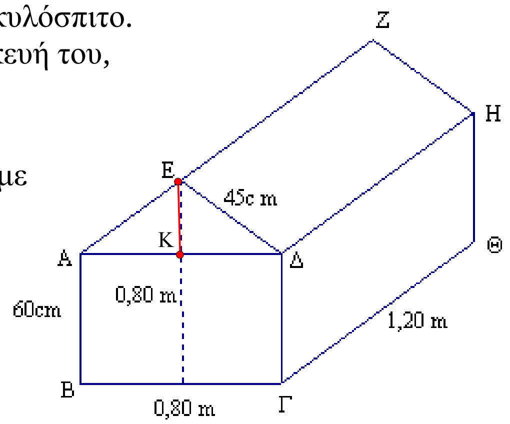
Αν α είναι η ακμή του κύβου, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $AΓ^2 = α^2 + α^2 = 2α^2$
Και από το ορθογώνιο τρ. ΔΑΓ έχουμε $ΔΓ^2 = ΔΑ^2 + ΑΓ^2 =$
$= α^2 + 2α^2 =$
$= 3α^2$

Επομένως $ΔΓ = \sqrt{3α^2} = α\sqrt{3}$ δηλαδή $δ = α\sqrt{3}$ άρα
$α\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ άρα
$α = 8$

Το εμβαδόν της επιφάνειας του κύβου είναι $E = 6 \cdot 8^2 = 512\ cm^2$

12.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα ξύλινο σκυλόσπιτο.
Να βρείτε πόσο θα μας στοιχίσει η κατασκευή του, αν το κόστος του ξύλου είναι 15€ το m^2.



Προτεινόμενη λύση

Το δάπεδο του σπιτιού έχει επιφάνεια ίση με
$E_{δαπέδου} = 0,80 \cdot 1,20 = 0,96m^2$
Η μπροστινή όψη αποτελείται από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ εμβαδού
$(ΑΒΓΔ) = 0,80 \cdot 0,60 = 0,48m^2$
και το ισοσκελές τρίγωνο ΑΕΔ.
Έστω ΕΚ το ύψος του τριγώνου.
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΕΚΔ βρίσκουμε ότι $ΕΚ^2 = ΕΔ^2 - ΚΔ^2 =$
$= 45^2 - 40^2 =$
$= 425$

άρα $ΕΚ = \sqrt{425} \approx 20,6 \text{ cm} = 0,206\text{m}$

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $(ΑΕΔ) = \dfrac{ΑΔ \cdot ΕΚ}{2} = \dfrac{0,80 \cdot 0,206}{2} = 0,0824m^2$

Οπότε η μπροστινή όψη έχει εμβαδόν $0,48 + 0,0824 = 0,5624$
Το ίδιο εμβαδόν βέβαια έχει και η πίσω όψη.
Η δεξιά πλευρά ΔΓΘΗ έχει εμβαδόν $(ΔΓΘΗ) = 1,20 \cdot 0,60 = 0,72 \text{ m}^2$.
Το ίδιο εμβαδόν έχει και η αριστερή πλευρά που δεν φαίνεται.
Η σκεπή αποτελείται από δύο ορθογώνια εμβαδού $0,45 \cdot 1,20 = 0,54 \text{ m}^2$ τα ο καθένα.
Η συνολική επιφάνεια του σπιτιού είναι
$E = 0,96 + 2 \cdot 0,5624 + 2 \cdot 0,72 + 2 \cdot 0,54 = 4,6328 \text{ m}^2$
Το κόστος του σπιτιού είναι $15 \cdot 4,6328 = 69,492$ €